الجمعية الأردنية للعلوم التربوية، المجلة التربوية الأردنية، المجلد الحادي عشر ، العدد الأول، 2026
DOI: https://doi.org/10.46515/jaes.v11i1.1842

The Effect of the Pirie and Kieren Model of Mathematical Understanding on the Enhancement of Geometric Thinking among Seventh Grade Students

Hadia Ahmad Al-Wardat*
Prof. Amal Abdullah Khasawneh**
Prof. Emad Tawfeeq Al-Sa'di***

Received 29/10/2024 Accepted 15/12/2024

Abstract:

The study investigated the effect of Pirie and Kieren model of the mathematical understanding on the enhancement of geometric thinking. To achieve this, a quasi - experimental methodology with pre-post design of two groups was used, develop a geometric thinking test. A convenient sample of (50) female seventh grade students was selected and assigned into two groups; experimental and control. The results showed statistically significant differences in the geometric thinking test and at each of its levels in favor of the experimental group. Moreover, there were significant differences between the percentages of the students who were classified at the analytical, the informal deduction and the formal deduction levels in favor of the experimental group, and there were no significant differences between the percentages of female students who were classified within the visualization level. And a significant gain in the geometric thinking levels attributed to the teaching method was revealed. In light of the results, a set of recommendations were presented for teachers and researchers Further research is needed to develop instruction based on the Pirie-Kieren model for other geometry topics, for different content standards such as algebra, and for different educational levels.

Keywords: Pirie and Kieren model, Geometric Thinking, Mathematical Understanding.

* Jordan\ harwnalwrdat68@gmail.com
** Faculty of Educational Sciences\ Yarmouk University\ Jordan\ Amal.khasawneh@yu.edu.jo
*** Faculty of Educational Sciences\ Yarmouk University\ Jordan\. Imad.Sadi@yu.edu.jo

أثر أُنموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي (Pirie and Kieren model) في تعزيز التفكير الهندسي لدى طلبة الصف السابع

هادية أحمد الوردات *

أ.د. أمل عبدالله خصاونة **

أ.د. عماد توفيق السعدي ***

ملخص:

هدفت الدراسة إلى إستقصاء أثر أُنموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تعزيز التفكير الهندسي. ولتحقيق هذا الهدف، استخدم المنهج شبه التجريبي بتصميم قبلي –بعدي لمجموعتين إحداهما تجريبية والأخرى ضابطة، طوّر اختبار في التفكير الهندسي. واختيرت عينة متيسرة من (50) طالبة من الصف السابع توزعت بالتساوي على مجموعتي الدراسة. وقد أظهرت النتائج فروقاً ذات دلالة إحصائية في إختبار التفكير الهندسي وعلى كل مستوى من مستوياته لصالح المجموعة التجريبية، فضلاً عن وجود فروق جوهرية بين النسب المئوية للطالبات اللواتي صنفن ضمن المستويات العليا: التحليلي، والاستدلال غير الشكلي والاستدلال الشكلي، وعدم وجود فروق جوهرية بين النسب المئوية للطالبات اللواتي صنفن ضمن المستوى التصوري، ووجود فرق جوهري بين متوسطي التحسن(الكسب) في مستويات التفكير الهندسي لديهنّ، وجميعها لصالح المجموعة التجريبية. وفي ضوء النتائج، قدمت الدراسة مجموعة من التوصيات للمعلمين والباحثين كإجراء مزيد من البحوث لتطوير التعليم المرتكز على أُنموذج بيري وكيرين لموضوعات هندسية أخرى، ولمعايير محتوى مختلفة كالجبر ولمراحل تعليمية مختلفة.

الكلمات المفتاحية: أُنموذج بيري وكيرين، التفكير الهندسي، الفهم الرياضي.

* الأردن / harwnalwrdat68@gmail.com

** كلية العلوم التربوية/ جامعة اليرموك/ الأردن/Amal.khasawneh@yu.edu.jo

*** كلية العلوم التربوية/ جامعة اليرموك/ الأردن/ Imad.Sadi@yu.edu.jo

المقدمة:

تواجه عملية الفهم في الرياضيات بشكل عام تحدياً لجميع القائمين على تعليم الرياضيات وتعلمها، وربما تأخذ هذه التحديات ذروتها في موضوع الهندسة الذي يحتاج في مرحلة متقدمة من مراحل تعلمه إلى الاستدلال الاستنتاجي الذي يؤثر في المقدرة على التبرير والبرهان، إلى جانب ضرورة استخدام اللغة الرياضية بفاعلية، والتميز بالدقة البالغة والتجريد.

وفي سياق الهندسة، أكد المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000, 2014) بأنّ عملية التدريس يجب أن توجه الطلبة إلى التعرف إلى سمات الأشكال الهندسية فضلاً عن فهم العلاقات بين تلك السمات، وأشار المجلس ذاته إلى وجوب إتاحة الفرصة والدعم لجميع الطلبة من أجل تعلم الرياضيات بعمق وفهم، إذ إن إكساب الطلبة مهارات التفكير هو أحد أهداف تدريس الرياضيات.

ويعد التفكير في الهندسة قاعدة أساسية لفهم هرمية تعلم بنية الهندسة، وقد تزامنت تلك الهرمية مع تقدم خبرات الطلبة في تعلم الهندسة عبر الصفوف المختلفة، ويعد أُنموذج التفكير الهندسي من الأطر المعروفة التي توجه البحث التربوي لفهم الصعوبات التي يواجهها الطلبة في الهندسة، فضلاً عن مساعدة المعلم على فهم مستوى تفكيرهم، كما تسهم تلك المستويات من التفكير في تصميم النشاطات التدريسية داخل الغرفة الصفية، إلى جانب المقدرة على تفسير مستوى فهم الطالب. ومن هنا كان لزاماً على مطوّري المناهج الأخذ بعين الاعتبار الهرمية في التفكير الهندسي (Van Hiele, 1986; NCTM, 2014, 2020).

ونتيجة لما يعانيه الطلبة من مشكلات في فهم الهندسة، اقترح فان هيل وزوجته أُنموذجاً للتفكير الهندسي، تكون من خمسة مستويات هرمية تمثلت بِ: التصوري (Visualization)، والتحليلي (Analysis)، والاستدلال غير الشكلي (Informal deduction)، والاستدلال الشكلي (Formal deduction)، والدقة البالغة (Rigor). وفيما بعد، طورّ فان هيل أُنموذجه إلى ثلاثة مستويات: التصوري، واقتصر على ملاحظة الشكل وتسميته؛ الوصفي واقتصر على ملاحظة الأشياء من خلال سماتها الهندسية؛ الاستدلالي وتمثّل ببرهنة العلاقات الهندسية من خلال التفكير الاستنتاجي (Van Hiele, 1999; Pavilovicova and Bockova, 2021; Mawarsari, Waluya and Dewi, 2023; Naufal, Abdullah, Zainal and Alshaye, 2024).

ويمكن وصف مستويات التفكير الهندسي كالآتي حسب ما جاء في الأدب السابق

Usiskin, 1982; Van Hiele, 1999; Abdullah and Zakaria, 2013;) Pavilovicova and Bockova, 2021; Uygun and Guner, 2021; Al Jahni, :(2016

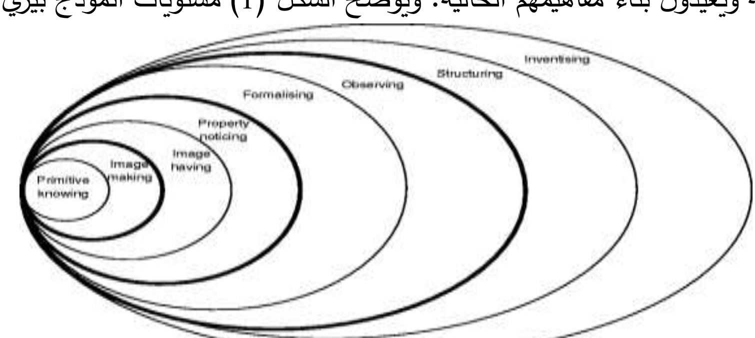
- التصوري: يتعرف الطلبة في هذا المستوى على المفهوم الهندسي من خلال الشكل، وتمييزه من بين مجموعة من الأشكال الهندسية المماثلة على أساس إدراكهم البصري. مثلاً: يستطيع الطالب أن يميز المستطيل من بين مجموعة أشكال هندسية بناءً على صورة ذهنية لديه بأن المستطيل شكل رباعي مغلق.
- التحليلي: يتعرف الطلبة في هذا المستوى على سمات المفاهيم الهندسية، لكنهم لايدركون العلاقات بين سمات المفهوم الواحد، ولا يميزون بين السمات المميزة والثانوية للمفهوم الهندسي. مثلاً: يحلل الطلبة المستطيل ليلاحظوا أن الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية وأنه يحتوي أربع زوايا قوائم كسمات للمستطيل، إذ أن الطلبة لا يدركون السمات التي تشكل تعريف المستطيل.
- الاستدلال غير الشكلي: يدرك الطلبة في هذا المستوى العلاقات بين سمات المفهوم الواحد والمفاهيم الهندسية المختلفة، ويملكون المقدرة على إنشاء علاقات بين المفاهيم الهندسية ويبدأون بتقديم تعريفات مجردة لتفكيرهم فيما يخص المفاهيم بالاعتماد على أقل عدد من السمات المميزة. مثلاً: يمكن للطلبة إعطاء تعريف للمستطيل بأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة بدلاً من متوازي أضلاع له أربع زوايا قوائم.
- الاستدلال الشكلي: يقدّر الطلبة في هذا المستوى معنى الاستدلال وأهميته ودور المسلمات والنظريات والبراهين في برهنة العلاقات والتعليل ضمن خطوات البرهان وبعبارات منطقية.
- الدقة البالغة: يدرك الطلبة في هذا المستوى كيفية العمل على نظام رياضي بديهي، ويستطيعون استخدام جميع أنواع البراهين والاستنتاجات المجردة ويميزون بين أنظمة الهندسة المختلفة.

وأشار أكارسو(Akarsu, 2022) إلى أن من السمات الأساسية لمستويات التفكير الهندسي لفان هيل التسلسل والهرمية، فإذا لم يتقن الطالب بنجاح أي مستوى من تلك المستويات، فإنّ أداءه سيعتمد على الخوارزميات والاجراءات في المستوى الأعلى. فضلاً عن السمة السابقة، فإنّ تقدم الطالب من مستوى إلى آخر يعتمد على جودة التدريس، وليس النضج أو العمر أو البيئة أو دعم

الأقران والوالدين.

ولا شك أنّ أُنموذج فان هيل للتفكير الهندسي يشكل إطاراً للفهم في الهندسة، ولا بدّ من تحقيق مستويات هذا الفهم، ويحتاج ذلك إلى إطار فهم رياضي عام يمكن استخدامه لتحقيق ذلك. وفي هذا السياق، شهدت العقود الأخيرة نمواً في استخدام أطر الفهم الرياضي في البحث في مجال تربويات الرياضيات، فمنها ما ركز على تصنيف الفهم لدى الطلبة مثل بيري وكيرين Pirie and Kieren (1992) وسكمب Sierpinska (1990)، ومنها ماهو خطي، ومنها ما هو ديناميكي غير خطي يقوم على مبدأ الرجوع للخلف (Folding back). وانتقالاً من الأطر أو النماذج التعلمية التي وصفت بالخطية مثل أُنموذج بلوم للنمو المعرفي والذي تم تعديله من قبل ايرفن Irvine (2023)، فقد طورّ بيري وكيرين عام 1989 أُنموذجاً ديناميكياً معقداً، وانطلق ذلك من نظرية التعقيد والتشابك Complexity theory، التي تنطلق من النظرة البنائية للفهم، وغير خطي؛ أي يسمح للطالب بالانتقال عبر المستويات لتوسيع فهمه. ووصف بيري وكيرين Pirie and Kieren (1994) طبيعة الفهم الرياضي ضمن بيئة تعلم بنائية، وهو أُنموذج هادف يستخدم لوصف عملية تطور فهم الطلبة للرياضيات، ورسم خريطة لفهمهم في العملية التعليمية – التعلمية.

وأشار عدد من الباحثين(Pirie and Kieren,1994; Gulkilik, Ugurlu and Yuruk, 2015; Negara, Turmudi and Wahyudin, 2024) إلى أن أُنموذج بيري وكيرين يتكون من ثمانية دوائر متداخلة، تسمى فيها المناطق الواقعة بين الدوائر بمستويات الفهم، وتتطور تلك المستويات للفهم الرياضي بشكل ديناميكي مع التحرك ذهاباً وإياباً بين الأفكار، إذ يتأمل الطلبة ويعيدون بناء مفاهيمهم الحالية. ويوضح الشكل (1) مستويات أُنموذج بيري وكيرين.



الشكل(1): أُنموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي(Pirie and Kieren,1994, p.39)

وقد طرحت عدة أبحاث وصفاً لمستويات الفهم الرياضي حسب تسلسلها الهرمي في أُنموذج بيري وكيرين من بينها (Pirie and Kieren, 1994; Lyndon, Lionel and Lynda, 2005: Goklap and Bulut, 2018):

- المعرفة الأولية (Primitive Knowing): يدرك الطالب في هذا المستوى معرفة جزئية من المفهوم موضع الاهتمام والتعلم. وربما تكون معرفة سابقة ضرورية لتعلم مفهوم جديد. مثلاً لتعلم زوايا المثلث، على الطالب معرفة مفهوم الزاوية ومفهوم المثلث، وكيفية قياس الزاوية، وأنواع المثلثات حسب الأضلاع، وأنواع المثلثات حسب الزوايا.
- تكوين الصورة (Image Making): يستخدم الطالب معرفته الأولية في تكوين تمثيلات مادية، مثل رسم مخططات أو العمل من خلال الأمثلة. وعلى سبيل المثال لموضوع زوايا المثلث، يمكن أن يستخدم الطالب الأدوات الهندسية لقياس الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلث.
- امتلاك الصورة (Image Having): يتمكن الطالب من اعطاء وصف أو تفسير لرسوماته وتمثيلاته التي استخدمها في مستوى تكوين الصورة دون تكرار نشاطات مادية مثل الرسومات والتمثيلات. فمثلاً لإيجاد قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية لمثلث، يمكن أن يجدها الطالب بدون استخدام الأدوات الهندسية.
- ملاحظة الخصائص (Property Noticing): يتمثل باستخدام الصور التي امتلكها الطالب عن المفهوم الرياضي، وفحص أوجه الاختلاف والتشابه بين تلك الصور الذهنية وربطها ببعضها بعضاً بعبارات رياضية معينة. فمثلاً يمكن أن يلاحظ الطالب أن قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلية غير المجاورة.
- الطابع الرسمي (Formalising): يتمكن الطالب من تمييز صورة عامة عن المفهوم باستخدام عبارات رياضية كونها من مستوى ملاحظة الخصائص، مثل بناء تعريف لمفهوم رياضي أو خوارزميات أو صيغ. فمثلاً يكون الطالب قادراً على إستنتاج أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمثلث =180°.
- الملاحظة (Observing): يلاحظ الطالب معنى ما تم اضفاء الصفة الرسمية عليه ويتأمل ملاحظاته وينظمها ويربطها بسياقات حياتية وموضوعات جديدة في الرياضيات، بحيث يستطيع الطالب ربط زوايا المثلث في الحياة الواقعية مع اعطاء أمثلة على ذلك، مثل السقالة

التي تستخدم في أعمال البناء تعد تطبيقاً حياتياً لإحتوائها على زوايا المثلث.

- الهيكلة (Structuring): يدرك الطالب العلاقات بين الموضوعات المختلفة ويطرح أسئلة حول الحقائق والأفكار والأمثلة، ويربط بينها كي يتمكن من تشكيل بنية معرفية من خلال الملاحظة الرسمية؛ مثلاً يثبت الطالب العلاقة: قياس الزاوية الخارجية للمثلث= مجموع قياسات الزاويتين البعيدتين عنها في المثلث.
- الابتكار (Inventising): يمثل المستوى الخارجي في خريطة مستويات الفهم، وهي أعلى مستوى ممكن أن يصل إليه الطالب في أثناء ممارسة نشاط رياضي، وينقطع الطالب في هذا المستوى عن تصوراته السابقة التي أدت به إلى الفهم ويبدأ بطرح أسئلة جديدة قد تؤدي إلى مفاهيم جديدة. مثلاً يتوصل الطالب بعد طرح الأسئلة إلى العلاقة الجديدة أن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمثلث =360° . ونادرا ما يصل الطلبة إلى المستويين الأخيرين.

ويمتلك أُنموذج بيري وكيرين ميزتين رئيستين؛ تتمثل الأولى بالطي للخلف وهي الميزة الرئيسة للأُنموذج، وتحدث بشكل متكرر عندما يواجه الطالب مشكلة لا يمكنه حلها وهو في مستوى فهم خارجي فيحتاج إلى العودة إلى مستويات داخلية سابقة من الفهم لفحص أفكاره الحالية وتعديلها وتوسيع فهمه الحالي غير الكاف، وهي ضرورية لبناء المعرفة لمستويات خارجية. وتتمثل الميزة الثانية بأنه لا حاجة للحدود؛ فتشير الحدود في أُنموذج بيري وكيرين إلى انتقال الطلبة إلى الفهم الرسمي والتجريدي، وتفصل الحدود الأُنموذج إلى أربعة أجزاء؛ وتعني أن الطلبة لم يعودوا بحاجة إلى الاجراءات والأنشطة التي تم تنفيذها في المستويات الداخلية وبإمكانهم العمل بمستوى أكثر عمومية وتجريدية من الفهم في المستويات الخارجية، ومن هنا، يعد أُنموذج بيري وكيرين في صميم التعليم والتعلم البنائي الذي يمكن أن يحقق مقدرات معرفية متقدمة لدى الطلبة (Pirie and Kieren, 1994; Lyndon et al., 2005; Gulkilik et al., 2015).

ومن خلال مراجعة الأدب السابق، يُلحظ محدودية الدراسات التجريبية التي تناولت أثر أُنموذج بيري وكيرين في التفكير الهندسي بشكل خاص، بل كانت معظم الدراسات التي تناولت أُنموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي وصفية–نوعية تقصّت مستويات الفهم في الرياضيات لدى الطلبة. وفي إطار وصف نمو فهم الطلبة للهندسة بموجب أُنموذج بيري وكيرين، أجرى نيجارا وآخرون Negara et al (2024) دراسة نوعية، شملت عينة الدراسة طالبين في الصف الخامس، تم مراقبتهما في أثناء إكمالهم المهمات الهندسية، إلى جانب اختبار قائم على الإطار النظري

لبيري وكيرين لوصف عملية نمو الفهم لديهما، ومقابلات شبه مقننة لجمع البيانات. أظهرت النتائج وجود فجوات في فهم الطالبين للموضوعات الهندسية، وذلك في أثناء حلهما المهمات الهندسية، وفي أثناء ممارسة مهارة الطي للخلف في كل مستوى من مستويات أُنموذج بيري وكيرين.

وفي سياق الدراسات شبه التجريبية، أجرى ركسبي وماكاسفسكا Rexhepi and Makasevska (2024) دراسة من أجل بيان أثر تطبيق نظرية بيري وكيرين في تحسين فهم الكسور، واستخدم التصميم التجريبي لمجموعتين؛ تجريبية وتكونت من (80) تلميذا، وضابطة تكونت من (66) تلميذا من المرحلة الإبتدائية. وتمّ تصميم اختبار لتقييم مخرجات التعلم لمادة الكسور، وبيّنت النتائج فاعلية التدريس من خلال أُنموذج بيري وكيرين مقارنة بالتدريس الاعتيادي.

وفي السياق ذاته، أجرى بني سلامة (Bani Salamah, 2023) دراسة هدفت إلى معرفة أثر أُنموذج بيري وكيرين في تحسين التبرير الرياضي والمرونة المعرفية لدى طلبة الصف السابع، واستخدم المنهج شبه التجريبي لمجموعتين بتصميم قبلي- بعدي. شارك في الدراسة (42) طالباً توزعوا إلى مجموعتين؛ (21) طالباً للمجموعة التجريبية، و(21) طالباً للمجموعة الضابطة، واستخدم اختبار التبرير الرياضي واختبار المرونة المعرفية ومقابلة شبه مقننة كأدوات لجمع البيانات. أظهرت النتائج أن التعلم باستخدام أُنموذج بيري وكيرين يحسّن التبرير الرياضي بجميع أشكاله (من خلال التعريف، الاستقرائي، الاستنتاجي).

وهدفت دراسة الشرملسي (Al_sharmelsi (2023 إلى معرفة فاعلية استخدام أُنموذج فان هيل للتفكير الهندسي المدعم ببرمجية الجيوجبرا في تنمية التفكير الهندسي لدى طلبة الصف الثاني اعدادي، واستخدم المنهج شبه التجريبي لهذه الدراسة. وشملت عينة الدراسة (60) طالبا توزعوا بالتساوي إلى مجموعتين تجريبة وضابطة، وتم استخدام اختبار التفكير الهندسي كأداة لجمع البيانات. أظهرت النتائج وجود فرق دال إحصائياً بين أداء المجموعتين على اختبار التفكير الهندسي لصالح المجموعة التي درست باستخدام أُنموذج فان هيل المدعّم ببرنامج الجيوجبرا.

وفي سياق الدراسات النوعية، هدفت دراسة أريناس و رودريغيز (Arenas and Rodriguez (2022 إلى تحليل فهم الطلبة – بموجب أُنموذج بيري وكيرين- في أثناء حل مهمات في موضوع النسبة . تكونت عينة الدراسة من أربعة طلاب من الصف السادس في

مدرسة ابتدائية، استخدم اختبار مكون من مجموعة من المهمات ومقابلة لجمع البيانات. أظهرت النتائج أنَ الطلبة لم يتمكنوا من الوصول إلى المستوى الخامس وهو الطابع الرسمي بسبب الصعوبة في تطبيق الإستراتيجيات الرياضية عند حل المهمات النسبية.

وفي دراسة أجراها أكارسو (Akarsu,2022) من أجل الكشف عن كيفية استخدام نظرية فان هيل وأُنموذج بيري وكيرين لتقييم فهم المعلمين قبل الخدمة في الهندسة، تمّ تحليل(20) دراسة منشورة من عام 1990 إلى عام 2022 –اختيرت بالطريقة القصدية – للمقارنة بين الدراسات التي استخدمت نظرية فان هيل وأُنموذج بيري وكيرين بشكل منفصل. أظهرت النتائج أن نظرية فان هيل مفيدة لتحديد مستويات فهم المعلمين قبل الخدمة لموضوع معين في الهندسة، بينما يقدم أُنموذج بيري وكيرين أسلوباً جديداً لفهم كيفية تطور فهم المعلمين قبل الخدمة في الهندسة، ويتميز بخصيصة الطي للخلف التي تشير إلى عمق المعرفة.

وأجرى باتمنير وأمين وسليمان (Patmaniar, Amin and Sulaiman, 2021) دراسة هدفت إلى الكشف عن مستويات معرفة طلبة المدارس الثانوية في حل مشكلات في الرياضيات باستخدام طريقة الطي للخلف؛ أي الرجوع إلى مستوى سابق من الفهم حسب أُنموذج بيري وكيرين. استخدم المنهج الوصفي، وتكونت عينة الدراسة من (33) طالباً وطالبة، تم استخدام اختبار مشكلات حسابية ومقابلة لتحديد نتائج حل المشكلات الحسابية. أظهرت النتائج وجود اختلافات في مستوى فهم الطلبة في حل المشكلات إذ استخدم بعضهم عملية الطي للخلف على مستوى امتلاك الصورة والطابع الرسمي والهيكلة، بينما استخدم بعضهم الآخر عملية الطي للخلف على مستوى تكوين الصورة وملاحظة الخصائص والطابع الرسمي والملاحظة.

وفي سياق الدراسات شبه التجريبية، هدفت دراسة حجازي (Hijazi, 2020)إلى الكشف عن فاعلية أُنموذج بيري وكيرين في تنمية التفكير الجبري لدى طلبة الصف الثاني الإعدادي. تكونت عينة الدراسة من (73) طالبا وطالبة توزعوا إلى مجموعتين؛ تجريبية (35) طالبا وطالبة درسوا باستخدام أُنموذج بيري وكيرين، وضابطة (38) طالبا وطالبة درسوا بالطريقة الإعتيادية، واستخدم اختبار للتفكير الجبري لجمع البيانات. وأظهرت النتائج أن أُنموذج بيري وكيرين يسهم في تنمية التفكير الجبري بشكل عام ومهاراته الفرعية، كالاستدلال.

أما مارديانا وسوسيسو وهيدايانتو (Mardiana, Susiswo, and Hidayanto (2017، فقد أجروا دراسة نوعية، للكشف عن كيفية نمو فهم الطلبة في حل مشكلة إشتقاق بناءً على

أُنموذج بيري وكيرين. تكونت عينة الدراسة من طالبين جامعيين درسوا التفاضل والتكامل، واستخدم اختبار وشرائط فيديو ومقابلة كأدوات لجمع البيانات. أظهرت النتائج بلوغ الطالبين المستويات الستة الأولى من أُنموذج بيري وكيرين، وعلى الرغم من وصول الطالبين للمستوى نفسه من الفهم، سجل كل طالب مساراً مختلفاً لفهم النمو لديه، ولم يتمكن الطالبان من ممارسة مهارة الطي للخلف من تلقاء أنفسهم، بل كانوا بحاجة إلى التدخل.

تعقيب على الدراسات السابقة

في ضوء ما سبق، أشارت الدراسات السابقة (Casanova, Cantoria and Lapinid, 2021; Akarsu, 2022; Alsharmelsi, 2023) إلى ضعف الطلبة قي تحقيق مستويات متقدمة في التفكير الهندسي، إذ كانت مستويات التفكير الهندسي لديهم أقل من المستوى المتوقع. وقد تبيّن قلة الدراسات التجريبية أو شبه التجريبية التي بحثت في أثر أُنموذج بيري وكيرين في تحسين متغيرات تابعة تتعلق بالرياضيات، وبخاصة التفكير الهندسي؛ إذْ كانت معظمها دراسات وصفية–نوعية، تستطلع مستويات الفهم الرياضي حسب أُنموذج بيري وكيرين(Mardiana et al., 2017; Patmaniar et al., 2021; Arenas and Rodriguez, 2022)، ومن هنا جاءت الدراسة الحالية لتتميز بتقصيَ أثر التعلم القائم على أُنموذج بيري وكيرين في تعزيز التفكير الهندسي لدى طلبة الصف السابع، إذ لم يتم دراسة أثر أُنموذج بيري وكيرين في تحسين التفكير الهندسي لدى الطلبة بتصميم شبه تجريبي قبلي – بعدي.

مشكلة الدراسة وأسئلتها

يواجه تعليم الرياضيات في الأردن جملة من التحديات، من أهمّها صعوبة تعلم الطلبة وفهمهم لمادة الرياضيات، فقد انعكس ذلك من خلال نتائج الطلبة في الاختبارات الدولية إذ تبين أن الأردن حقق الترتيب (33) من بين (39) دولة مشاركة في اختبار التمس(TIMSS,2019)، وحقق الترتيب (55) من بين (79) في اختبار البيزا عام 2018، ويمكن ملاحظة أنّ أداء طلبة الأردن كان منخفضاً ولم يكن بالمستوى المنشود. فضلاُ عن ما أظهرته الاختبارات الدولية من ضعف في الهندسة لدى الطلبة(National Center، 2019).

فقد أظهرت الدراسات السابقة التي بحثت في التفكير الهندسي ضعف الطلبة في مستويات التفكير الهندسي وعدم امتلاكهم المقدرة على الوصول إلى المستويات الاستدلالية العليا (Casanova et al., 2021; Celika and Yilmazb, 2022).

ويلحظ من خلال مراجعة الأدب السابق وجود فجوة في المجال البحثي المتعلق بأُنموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي، وبالذات كأُنموذج تعليمي–تعلمي وأثره في بعض المتغيرات بشكل عام والتفكير الهندسي بشكل خاص. وبناءً على ما تقدم، تحددت مشكلة الدراسة في الإجابة عن السؤال الرئيس الآتي:

ما أثر التعلم القائم على نموذج بيري وكيرين (Pirie – Kieren Model) للفهم الرياضي في تعزيز التفكير الهندسي لدى طالبات الصف السابع الأساسي؟

ينبثق من هذا السؤال الأسئلة الآتية:

1. هل يختلف أداء طالبات الصف السابع في التفكير الهندسي وعلى كل مستوى من مستوياته (التصوري، التحليلي، الاستدلال غير الشكلي، الاستدلال الشكلي) باختلاف طريقة التدريس (أُنموذج بيري وكيرين، الطريقة الاعتيادية)؟
2. هل تختلف النسب المئوية لتصنيفات طالبات الصف السابع الأساسي على مستويات التفكير الهندسي (التصوري، التحليلي، الاستدلال غير الشكلي، الاستدلال الشكلي) باختلاف طريقة التدريس (أُنموذج بيري وكيرين، الاعتيادية)؟
3. هل يختلف التحسن(الكسب) في مستويات التفكير الهندسي قبل التعرض إلى التعلم من خلال أُنموذج بيري وكيرين وبعده لدى طالبات الصف السابع باختلاف طريقة التدريس (أُنموذج بيري وكيرين، الطريقة الاعتيادية)؟

أهمية الدراسة

تتجلى أهمية هذه الدراسة – من الناحية النظرية– في محاولتها إيجاد حلول لرفع مستوى الأداء في الهندسة لدى طالبات الصف السابع الأساسي، وذلك بعرض المادة التعليمية من خلال أُنموذج بيري وكيرين، فضلاً عن أنها تعطي مؤشراً عن جانب فهم الخرائط المفاهيمية لدى الطالبات في أثناء التعلم من خلال العمليات المرافقة للأُنموذج. كما تستمد الدراسة أهميتها العملية من خلال تعريف معلم الرياضيات بأُنموذج بيري وكيرين إلى جانب الاستفادة منه في كسر الملل الحاصل في الطرق الاعتيادية التي يكون محورها المعلم وليس الطالب. فضلاً عن ما سبق، تقدم هذه الدراسة للقائمين على تطوير كتب الرياضيات وأدلتها مدخلاً جديداً لتدريس الرياضيات، وبالمقابل تثير اهتمام الباحثين لاجراء مزيد من الأبحاث في سياقات رياضية مختلفة.

مصطلحات الدراسة وتعريفاتها الإجرائية

- **أُنموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren Model):** يصف عملية النمو للفهم الرياضي وفق ثمانية مستويات وضعها بيري وكيرين والمتمثلة ب: المعرفة الأولية، وتكوين الصورة، وامتلاك الصورة، وملاحظة الخصائص، والطابع الرسمي، والملاحظة، والهيكلة، والابتكار (Pirie and Kieren, 1994). ويعرّف إجرائياً: بأنه منحى تعليمي–تعلمي يقوم على نمو الفهم الرياضي وفق ثمانية مستويات يتنقل الطالب فيما بينها في أثناء تعلم وحدة الزوايا والمضلعات والتحويلات الهندسية من خلال خصيصة الرجوع للخلف.
- **الفهم الرياضي:** هو استيعاب المادة الرياضية من خلال ترجمتها لشكلٍ آخر وتمثيلها، أو تفسير حقائق أو تقدير نتائج، وهو مستوى أعلى من مجرد حسابات رياضية. ويعرف إجرائياً: العمليات التي يقوم من خلالها الطلبة ببناء تفكيرهم وتوسيعه من خلال تنقل الطالب بين مستويات الفهم لأُنموذج بيري وكيرين.
- **التفكير الهندسي:** نشاط ذهني يمر بعدة مستويات هرمية بناءً على نظرية فان هيل والمتمثلة بالمستويات: التصوري، والتحليلي، والاستدلال غير الشكلي، والاستدلال الشكلي، والدقة البالغة. ويقتصر التفكير الهندسي في هذه الدراسة على المستويات الأربعة الأولى.
- **الأداء في التفكير الهندسي:** وقيس بالدرجة التي حصل عليها الطالب في اختبار التفكير الهندسي.
- **التحسن في مستويات التفكير الهندسي:** الفرق بين مستوى التفكير الهندسي الذي تم تصنيف الطالبة ضمنه قبل التعرض لأُنموذج بيري وكيرين وبعد التعرض له. وقد تمّ ترقيم مستويات التفكير الهندسي إذ يمثل الرقم صفر المستوى دون التصوري، والرقم (1) المستوى التصوري، والرقم (2) المستوى التحليلي، والرقم (3) مستوى الاستدلال غير الشكلي، والرقم (4) مستوى الاستدلال الشكلي.

حدود الدراسة

- **الحدود البشرية:** شملت الدراسة عينة متيسرة مكونة من (50) طالبة من طالبات الصف السابع، توزعن إلى مجموعتين: التجريبية (25) طالبة والضابطة (25) طالبة.
- **الحدود المكانية:** تم إجراء الدراسة في إحدى مدارس الإناث التابعة لمديرية التربية والتعليم للواء الرمثا، وتم تدريس وحدة الزوايا والمضلعات والتحويلات الهندسية لعينة الدراسة.

- **الحدود الزمانية:** تم إجراء الدراسة في الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي 2024/2023.
- إقتصرت **محددات الدراسة** على وحدة الزوايا والمضلعات والتحويلات الهندسية للصف السابع، وإقتصارها على المستويات الأربعة الأولى للتفكير الهندسي، فضلاً عن الخصائص السيكومترية لأداة جمع البيانات.

منهجية الدراسة

تم استخدام المنهج التجريبي ذا التصميم شبه التجريبي قبلي– بعدي لمجموعتين، إحداهما تجريبية درست باستخدام نموذج بيري وكيرين، والأخرى ضابطة درست باستخدام الطريقة الاعتيادية.

أفراد الدراسة

تم اختيار عينة متيسرة مكونة من (50) طالبة من طالبات الصف السابع في مدرسة عمراوة الثانوية الشاملة للبنات التابعة لمديرية التربية والتعليم للواء الرمثا، للفصل الدراسي الأول للعام الدراسي 2024/2023، وذلك لتعاون مديرة المدرسة ومعلمات الرياضيات في إجراء الدراسة، واحتوت المدرسة على شعبتين فقط تمثلت إحداهما بالتعيين العشوائي بالمجموعة التجريبية وتكونت من (25) طالبة والأخرى بالمجموعة الضابطة وتكونت من (25) طالبة.

المادة التعليمية وفق أُنموذج بيري وكيرين

تم إعداد المادة التعليمية باستخدام أُنموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي، لوحدة الزوايا والمضلعات والتحويلات الهندسية للصف السابع الأساسي بالاستناد إلى الأدب النظري والدراسات السابقة (Pirie and Kieren, 1994; Lyndon et al., 2005; Goklap and Bulut, 2018; Patmaniar et al., 2021; Alsharmelsi, 2023; Negara et al., 2024). وتم إعداد الإجراءات التعليمية _ التعلمية القائمة على أُنموذج بيري وكيرين وفق الخطوات الآتية:

- تحديد النتاجات التعلمية لوحدة الزوايا والمضلعات والتحويلات الهندسية للصف السابع، موزعة على ثمانية دروس بواقع (21) حصة دراسية.
- تم إعداد دليل المعلم الخاص بتدريس المادة التعليمية باستخدام نموذج بيري وكيرين وذلك بالاعتماد على الدراسات السابقة (Pirie and Kieren, 1994; Goklap and Bulut, 2018; Patmaniar et al., 2021; Negara et al., 2024) وبعد تحليل مستويات الفهم الرياضي الخاصة بأُنموذج بيري وكيرين تم وضع مؤشرات أداء خاصة بكل مستوى إذ تم

إعداد الدليل في ضوء هذه المؤشرات، واحتوى الدليل على الهدف من الأُنموذج، والتعريف به، ومؤشرات آداء الطلبة وفقه، ودور المعلم ودور الطالب. كما تضمن خطة تفصيلية للوحدة الدراسية، وشرحاً عملياً لكل درس من دروس الوحدة مقسمة إلى حصص دراسية، ولكل حصة نتاجاتها الخاصة والتعلم القبلي اللازم والتوزيع الزمني لموضوعات الوحدة، وأمثلة وتدريبات وأنشطة متنوعة، ومهمات واقعية وواجبات بيتية، وإرشادات للمعلم لطبيعة تنفيذ المادة حسب مستويات أُنموذج بيري وكيرين.

وقد عرض الدليل على لجنة من المختصين بهدف إبداء آرائهم في مدى تحقيق المادة التعليمية للأهداف الموضوعة والتأكد من شموليتها وتوافقها مع أُنموذج بيري وكيرين، وللتحقق من الدقة العلمية للنشاطات المرافقة لكل درس في الوحدة الدراسية، وتم الأخذ بمقترحاتهم من حيث الإضافة والحذف والتعديل.

اختبار التفكير الهندسي

بعد الاطلاع على عديد من مناهج الرياضيات المدرسية، والاختبارات الدولية (TIMSS, PISA) والأدب السابق فيما يخص التفكير الهندسي، (Usiskin, 1982; Abdullah and Zakaria, 2013; Xistouri, Pantaizi, and Gagatsis, 2014; Casanova et al., 2021; Pavilovicova and Bockova, 2021, Rahayu and Jupri, 2021)، تم إعداد اختبار التفكير الهندسي. وتم تقسيم فقراته لتقيس مستويات التفكير الهندسي الأربعة الأولى، واستثني المستوى الخامس لافتراض أن طلبة الصف السابع لم يصلوا إلى مرحلة الدقة البالغة التي تمثل تنفيذ براهين معقدة، وفهم دور المسلمات في البرهنة، وفهم الهندسات المختلفة. وتأخذ فقرات الاختبار أشكالاً مختلفة: اختيار من متعدد، وصح وخطأ، والتكملة، والمقالية.

وتم التحقق من صدق المحتوى للاختبار من خلال عرضه على مجموعة من محكمين من ذوي الاختصاص، وبناء على ملحوظاتهم، تم إعادة صياغة بعض الفقرات، وحذف بعضها الآخر ليحتوي الاختبار بصورته النهائية: على ثمان فقرات للمستوى التصوري، وأربع للتحليلي، وتسع للاستدلال غير الشكلي، وست للاستدلال الشكلي، وبذلك تبلغ عدد فقرات الاختبار الكلي (27) فقرة، وتتضمن ما مجموعه (65) مهمة فرعية فقد توزعت المهمات على مستويات التفكير الهندسي كما يأتي: التصوري: 21 مهمة، التحليلي: 13مهمة، الاستدلال غير الشكلي: 21مهمة، الاستدلال الشكلي: 10مهمات.

وتم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية بلغت (20) طالبة من طالبات الصف الثامن– وذلك لدراستهن وحدة الزوايا والمضلعات والتحويلات الهندسية –على جلستين؛ شملت الأولى المستويين التصوري والتحليلي، وشملت الثانية الاستدلال غير الشكلي والاستدلال الشكلي، وذلك للتحقق من الخصائص السيكومترية للاختبار.

وقد تّم تحديد زمن الاختبار بحساب المتوسط الحسابي للزمن الذي استغرقته جميع الطالبات، وعليه بلغ الزمن للجلسة الأولى من الاختبار (45) دقيقة، والزمن للجلسة الثانية (60) دقيقة. ولأن الاختبار استخدم لغايات تصنيف الطلبة حسب مستويات التفكير الهندسي، وتم ايجاد معاملات الصعوبة للفقرات وتراوحت بين (0.25-0.80)، وبناءً على ما أشار إليه (Ouda, 2010) فإن المدى المقبول لصعوبة الفقرة يتراوح ما بين (0.20-0.80). وتم اعتماد معامل ارتباط الفقرة بالاختبار الكلي بدلاً من معامل التمييز للحكم على حذف الفقرات غير المناسبة؛ إذ يجب أن يحتوي الاختبار على أسئلة سهلة وأخرى صعبة حسب تسلسل مستويات التفكير الهندسي. لذا حُسبت معاملات ارتباط كل فقرة بالدرجة الكلية وبمجالها الذي تنتمي إليه، وقد تراوحت تلك المعاملات على التوالي: (0.90_0.46)، (0.87-0.48) وجميعها دالة إحصائياً(α =0.05) ، ولذلك لم يتم حذف أي من هذه الفقرات. كما تم استخراج معامل ارتباط المجال بالدرجة الكلية، ومعاملات الارتباط بين المجالات ببعضها، وبلغت على التوالي: (0.916–0.964)، (0.812–0.927)، وجميعها ذات دلالة إحصائية (α =0.05)، ممّا يشير إلى صدق الاتساق الداخلي للاختبار.

ولغايات تصحيح الاختبار، تم اعتماد العلامة 1 للاجابة الصحيحة، و0 للاجابة الخاطئة لكل مهمة فرعية، بينما في الأسئلة المقالية تم إعطاء علامة 1 للخطوات الكاملة والمتسلسلة والصحيحة وغير ذلك تعطى العلامة صفر، وبذلك تكون العلامة القصوى للإختبار 65 والعلامة الصغرى صفرا. كما تم تصحيح الاختبار عبر الزمن وبلغ معامل التوافق (0.93)، إذ تم التصحيح بعد أسبوعين من المرة الأولى، كما تم التصحيح عبر الأشخاص وبلغ معامل التوافق (0.91) وهذه قيم مقبولة لهذه الدراسة (Dalio,2014).

وللتأكد من ثبات الاختبار، تم التحقق بطريقة الاختبار وإعادة الاختبار (test- retest) بعد أسبوعين على العينة الاستطلاعية، ومن ثم تم حساب معامل ارتباط بيرسون بين الدرجات في المرتين للمستويات: التصوري، والتحليلي، والاستدلال غير الشكلي، والاستدلال الشكلي،

وبلغ0.86 ,0.82 ,0.85 ,0.83 على التوالي، وبلغ للدرجة الكلية (0.91). كما تم حساب معامل الثبات بطريقة التجانس حسب معادلة كودريتشاردسون وبلغ للمستويات ذاتها على التوالي 0.79، 0.72،0.77، 0.80 ، وبلغ للدرجة الكلية (0.86).

المعالجة الإحصائية

للإجابة عن السؤال الأول، تم استخدام تحليل التباين المصاحب الأحادي، والمصاحب الأحادي المتعدد. وللإجابة عن السؤال الثاني، ولأهداف التصنيف حسبت النسب المئوية للطالبات في كل مستوى من مستويات اختبار التفكير الهندسي في ضوء محكات الاجتياز لكل مستوى، واتبع باختبار ز (Z-test). كما استخدم اختبار "ت" لمجموعتين مستقلتين لمتوسطات التحسن (الكسب) في المستويات للإجابة عن السؤال الثالث.

إجراءات الدراسة:

- بعد تحديد مشكلة الدراسة وأسئلتها، تم مراجعة الأدب التربوي النظري والدراسات السابقة المتعلق بموضوع الدراسة.
- اختيار الوحدة التعليمية من كتاب الصف السابع للفصل الدراسي الأول للعام الدراسي 2024/2023.
- بناء المادة التعليمية ودليل المعلم، واختبار التفكير الهندسي.
- الحصول على الموافقات الرسمية اللازمة لتسهيل تطبيق الدراسة.
- اختيار عينة الدراسة بالطريقة المتيسرة ضمن مجموعتين التجريبية والضابطة.
- تطبيق اختبار التفكير الهندسي على عينة استطلاعية من خارج عينة الدراسة، وذلك من أجل التأكد من خصائصه السيكومترية.
- التطبيق القبلي لاختبار التفكير الهندسي على طالبات المجموعتين التجريبية والضابطة.
- تطبيق التجربة، إذ استغرقت (21) حصة صفية، وبالمقابل درست المجموعة الضابطة الوحدة الدراسية ذاتها وبعدد الحصص ذاتها.
- التطبيق البعدي لاختبار التفكير الهندسي على المجموعتين التجريبية والضابطة.
- تصحيح الاختبار من قبل مصححين، وإدخال البيانات وتبويبها على الحاسوب ورصدها وتحليلها من أجل التعرف إلى نتائج الدراسة وعرضها ومناقشتها، واقتراح التوصيات في ضوء النتائج.

نتائج الدراسة

نتائج السؤال الأول: هل يختلف أداء طالبات الصف السابع في التفكير الهندسي وعلى كل مستوى من مستوياته (التصوري، التحليلي، الاستدلال غير الشكلي، الاستدلال الشكلي) باختلاف طريقة التدريس؟

للإجابة عن هذا السؤال حسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل لدرجات طالبات الصف السابع على اختبار التفكير الهندسي في القياسين القبلي والبعدي تبعاً لطريقة التدريس، وذلك كما يتضح في الجدول (1).

الجدول (1): المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات طالبات الصف السابع على اختبار التفكير الهندسي ككل للقياسين القبلي والبعدي تبعاً لطريقة التدريس.

طريقة التدريس	العدد	القياس القبلي		القياس البعدي		المتوسط الحسابي المعدل	الخطأ المعياري
		المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي*	الانحراف المعياري		
نموذج بيري وكيرين	25	11.88	4.096	44.24	12.036	43.786	1.797
اعتيادية	25	11.04	3.360	29.04	6.711	29.494	1.797

*العلامة القصوى: 65

أظهر الجدول (1) وجود فروق ظاهرية في القياس البعدي للمتوسطات الحسابية لدرجات طالبات الصف السابع الأساسي على اختبار التفكير الهندسي وفقاً لطريقة التدريس. كما تم التأكد من تجانس التباين باستخدام اختبار ليفين (Levene's Test of Equality of Error Variances) كأحد اشتراطات تحليل التباين المصاحب، والذي أظهر تجانسا في التباين كما في الجدول (2).

الجدول (2) اختبار ليفين لتجانس التباين

قيمة ف	درجات الحرية 1	درجات الحرية 2	الدلالة الاحصائية
2.733	1	48	0.105

وللحكم على دلالة الفروق الظاهرية في الاختبار البعدي كما في الجدول (1)، تم اجراء تحليل التباين الأحادي المصاحب للقياس البعدي لاختبار التفكير الهندسي ككل وفقا لطريقة التدريس، ويوضح الجدول (3) النتائج.

الجدول (3): نتائج تحليل التباين الأحادي المصاحب للقياس البعدي على اختبار التفكير الهندسي ككل وفقا لطريقة التدريس.

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط مجموع المربعات	قيمة ف	مستوى الدلالة	مربع إيتا η^2
القياس القبلي	788.264	1	788.264	9.829	0.003	
طريقة التدريس	2520.024	1	2520.024	31.423	0.000	0.401
الخطأ	3769.256	47	80.197			
الكلي	7445.520	49				

يتضح من الجدول (3) وجود فرق ذي دلالة إحصائية (α =0.05) بين متوسطات أداء طالبات الصف السابع الأساسي على اختبار التفكير الهندسي وفقاً لطريقة التدريس، ولصالح المجموعة التجريبية، وذلك في ضوء المتوسطات الحسابية المعدّلة الموضحة في الجدول (1). كما يتضح من الجدول (3) أن حجم أثر طريقة التدريس كان كبيراً؛ فقد فَسرت قيمة مربع أيتا (η2) ما نسبته (40.1%) من التباين المُفسر في المتغير التابع وهو اختبار التفكير الهندسي ويرجع الباقي (59.9%) إلى متغيرات غير محددة.

وحسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل لدرجات الطالبات لكل مستوى من مستويات اختبار التفكير الهندسي القبلي والبعدي، ويوضح الجدول (4) ذلك.

الجدول (4): المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل للقياسين القبلي والبعدي لمستويات التفكير الهندسي وفقاً لطريقة التدريس.

المستويات	طريقة التدريس	العدد	القياس القبلي		القياس البعدي		المتوسط الحسابي المعدل	الخطأ المعياري
			المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري		
التصوري	نموذج بيري وكيرين	25	6.32	2.116	17.04	3.434	16.746	.635
	اعتيادية	25	5.76	1.715	14.40	3.512	14.694	.635
التحليلي	نموذج بيري وكيرين	25	2.24	1.268	10.00	2.327	9.680	.470
	اعتيادية	25	1.76	.723	5.64	2.62	5.9608	.470
الاستدلال غير الشكلي	نموذج بيري وكيرين	25	2.12	1.590	12.68	5.250	12.205	.805
	اعتيادية	25	2.20	1.633	6.64	2.827	7.115	.805
الاستدلال الشكلي	نموذج بيري وكيرين	25	1.20	.866	4.52	2.568	4.230	.378
	اعتيادية	25	1.32	.988	2.36	1.524	2.650	.378

العلامة القصوى: التصوري: 21، التحليلي: 13، الاستدلال غير الشكلي: 21، الاستدلال الشكلي: 10.

يُلحظ من الجدول (4) وجود فروق ظاهرية بين المتوسطات الحسابية في القياس البعدي لكل مستوى من مستويات التفكير الهندسي ناتج عن اختلاف طريقة التدريس، وبهدف التحقق من جوهرية الفروق الظاهرية، تم تطبيق تحليل التباين المصاحب الأحادي المتعدد على المستويات مجتمعة، وذلك كما هو مبين في الجدول (5).

الجدول (5): نتائج تحليل التباين الأحادي المصاحب المتعدد لأثر طريقة التدريس على مستويات التفكير الهندسي مجتمعة

الأثر	نوع الاختبار المتعدد	قيمة الاختبار المتعدد	ف الكلية	درجة حرية الفرضية	درجة حرية الخطأ	احتمالية الخطأ	حجم الأثر η^2
طريقة التدريس	Hotelling's Trace	0.813	8.333	4.000	41.000	0.000	0.448

يتبين من الجدول (5) وجود أثر ذي دلالة إحصائية لطريقة التدريس عند مستوى الدلالة (α =0.05) على القياس البعدي لمستويات التفكير الهندسي مجتمعة. ولتحديد لأي مستوى من المستويات كان هذا الأثر دالاً إحصائياً، فقد تم إجراء تحليل التباين الأحادي المصاحب لكل مستوى على حده وفقاً لطريقة التدريس، ويبين الجدول (6) ذلك.

الجدول (6): تحليل التباين الأحادي المصاحب لأثر طريقة التدريس على القياس البعدي لكل مستوى من مستويات التفكير الهندسي.

مصدر التباين		مجموع المربعات	درجة الحرية	وسط مجموع المربعات	ف	احتمالية الخطأ	حجم الأثر η^2
التصوري (المصاحب)	التصوري	2.150	1	2.150	.223	.639	
التحليلي (المصاحب)	التحليلي	27.319	1	27.319	5.167	.028	
غير الشكلي (المصاحب)	غير الشكلي	11.468	1	11.468	.739	.395	
الشكلي (المصاحب)	الاستدلال الشكلي	4.638	1	4.638	1.354	.251	
طريقة التدريس	التصوري بعدي	48.244	1	48.244	4.995	.031	0.102
	التحليلي بعدي	158.653	1	158.653	30.006	.000	0.405
	غير الشكلي بعدي	297.114	1	297.114	19.147	.000	0.303
	الاستدلال الشكلي بعدي	28.592	1	28.592	8.345	.006	0.159

مصدر التباين		مجموع المربعات	درجة الحرية	وسط مجموع المربعات	ف	احتمالية الخطأ	حجم الأثر η2
الخطأ	التصوري بعدي	425.006	44	9.659			
	التحليلي بعدي	232.645	44	5.287			
	غير الشكلي بعدي	682.782	44	15.518			
	الاستدلال الشكلي بعدي	150.754	44	3.426			
الكلي المصحح	التصوري بعدي	666.080	49				
	التحليلي بعدي	533.380	49				
	غير الشكلي بعدي	1309.220	49				
	الاستدلال الشكلي بعدي	272.320	49				

يظهر من الجدول (6) وجود فروق دالة إحصائيا ($\alpha= 0.05$) وفقا لأثر طريقة التدريس في جميع المستويات، وكانت الفروق لصالح المجموعة التجريبية، علماً بأنّ حجم الأثر قد بلغ 0.102، 0.405، 0.303، 0.159 للمستويات التصوري، والتحليلي، والاستدلال غير الشكلي، والاستدلال الشكلي على التوالي. ممّا يعني أن حجم الأثر قد تراوح ضمن الفئة (10.2%–40.5%)، ويصنف كبيراً (Kamel, 2022) للمستويات التحليلي، والاستدلال غير الشكلي، والاستدلال الشكلي.

وقد يعزى الفرق في نتائج المجموعة التجريبية إلى إجراءات التدريس المنبثقة عن مراحل أُنموذج بيري وكيرين، إذ تؤكد كل مرحلة من تلك المراحل مستوى فهم يتدرج في التطور من استخدام المعرفة السابقة أو التمثيلات المادية، مروراً ببناء الصورة الذهنية للمفاهيم والتعريفات والخوارزميات والصيغ والقواعد الرياضية، ومن ثمّ الانخراط في عملية تأمل الطلبة لملاحظاتهم، وتنظيمها وربطها في سياقات حياتية وموضوعات جديدة في الرياضيات، وصولاً إلى تعامل الطلبة مع ملاحظاتهم الرسمية مثل نظرية واثباتها باستخدام حجج رسمية. فضلاً عن دور خاصية الطي للخلف التي تسمح للطلبة التنقل ذهاباً وإياباً بين المستويات عند مواجهة صعوبة لحل مسألة رياضية أثناء التعلم الفردي أو التعلم في مجموعات، وتتفق هذه النتيجة مع ما جاء في الدراسات (Hijazi, 2020; Akarsu, 2022) إذ أظهرت النتائج بأن التدريس من خلال أُنموذج بيري وكيرين يمثل أسلوباً جديداً لفهم كيفية تطور الفهم لدى الطلبة في موضوع الهندسة، ويسهم أيضاً في تنمية التفكير بشكل عام ومهاراته الفرعية كالاستدلال.

نتائج السؤال الثاني: هل تختلف النسب المئوية لتصنيفات طالبات الصف السابع الأساسي على مستويات التفكير الهندسي (التصوري، التحليلي، الاستدلال غير الشكلي، الاستدلال الشكلي)

باختلاف طريقة التدريس؟

للإجابة عن السؤال الثاني تم تحديد محك لنجاح الطلبة على كل مستوى من مستويات التفكير الهندسي، إذ تعد الطالبة اجتازت المستوى التصوري إذا أجابت على(70%) من المهمات المخصصة لهذا المستوى فأكثر إجابة صحيحة، و(65%) فأكثر على المستوى التحليلي، و(60%) فأكثر على مستوى الاستدلال غير الشكلي، و(50%) فأكثر على مستوى الاستدلال الشكلي(Kasawneh,2007). وفي جميع الحالات السابقة تأخذ الطالبة علامة (1)، وعدا ذلك تأخذ صفراً، ومن هنا تعد الأنماط الآتية هي المقبولة للتصنيف: 0001، 0011، 0111، 1111، على أساس وجود تسلسل في اجتياز علامة المحك على المستويات كافة؛ وبالتالي تأخذ هذه التصنيفات المستويات: التصوري، التحليلي، الاستدلال غير الشكلي، الاستدلال الشكلي على التوالي. ومن هنا تم تحديد النسب المئوية للطالبات في كل مستوى، ومن ثمّ استخدم اختبار ز (Z-test) للنسب، ويوضح الجدول (7) نتائج هذا الاختبار.

الجدول (7): نتائج اختبار (Z-test) لنسب تصنيفات مستويات التفكير لدى طلبة الصف السابع

طريقة التدريس	النسبة للتصوري 0001	قيمة z	النسبة للتحليلي 0011	قيمة z	النسبة للاستدلال غ. الشكلي 0111	قيمةz	النسبة للاستدلال الشكلي 1111	قيمةz
أنموذج بيري وكيرين	%92	1.8405	%88	*4.298	%64	*4.4781	%44	*2.9017
اعتيادية	%72		%28		8%		4%	

*دالة إحصائيا عند مستوى (α =0.01)

يتبين من الجدول (7) بأنه لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين نسبة الطالبات اللواتي صنفن ضمن المستوى الأول (التصوري) يعزى لطريقة التدريس، كما يوضّح الجدول(7) وجود فرق ذي دلالة إحصائية بين نسبة الطالبات اللواتي صنفن ضمن المستويات (التحليلي، الاستدلال غير الشكلي، الاستدلال الشكلي) ولصالح المجموعة التجريبية.

وتتفق هذه النتيجة مع ما جاء في دراسة (Casanova et al., 2021) من حيث عدم وجود فرق جوهري بين نسبة الطالبات اللواتي صنفن ضمن المستوى الأول: التصوري؛ أي أن أغلب الطلبة اجتازوا هذا المستوى وهذا ما أشارت إليه الدراسة في نتائجها، وأشارت دراسة (Bani Salamah, 2023) في نتائجها إلى أن التعلم باستخدام أُنموذج بيري وكيرين يحسن التبرير

الرياضي بجميع أشكاله كالاستنتاج. فالخصيصتان عدم الخطية والرجوع للخلف في هذا الأُنموذج سمحت للطلبة التنقل بين مراحل أو مستويات الفهم الرياضي، فعندما يعجز الطالب عن التقدم في حل مهمة ما أو فهم فكرة رياضية ما يضطر الرجوع إلى المرحلة الأقل تقدماً لتساعده على تخطي الصعوبات ودعم الفكرة والتعمق فيها وكذلك التوسع من خلالها، ممّا ينمّي التفكير الهندسي لديه. فمثلاً عندما يمارس الطالب مستوى تكوين الصورة لمفهوم أو فكرة رياضية، فإنّ دور المعلم أن يطرح أسئلة لتوضيح الفكرة لدى الطالب، وكذلك للتعرف إلى سوء الفهم لديه، كما يضطر المعلم إلى دعم الطالب بدعامات مناسبة أو اعطاء بدائل لتكوين صور متعددة عن المفهوم من أجل تنمية الفهم لديه، وهذا بدوره يدعم تفكيره الهندسي.

كما أن المستويات الأكثر تقدماً مثل الهيكلة والابداع – وهي نادراً ما يحققها الطلبة– فواجب كل من المعلم والطالب ممارسة مرحلة الشمولية، إذ يُحفز الطالب على الحدس، وصياغة الفرضيات، وهذا يحاكي مستوى الاستدلال الشكلي في التفكير الهندسي. كل ما سبق يسمح للطالب بتعزيز مستويات التفكير الهندسي لديه، والتي بدورها تعد مستويات فهم وعلى الرغم من أنها خطية. وتجدر الإشارة إلى أن سلوك المعلم والطالب في أثناء ممارسة مراحل التعليم والتعلم المتعلقة بأُنموذج بيري وكيرين تحاكي الأنماط السلوكية التي يفترض أن يمارسها في أي أُنموذج بنائي مثل الدافعية للتعلم، والرغبة في الانخراط في عملية التعلم والتعاون، وكلها عوامل ساعدت الطلبة على تعزيز مستويات التفكير في الهندسة لدى الطلبة وبخاصة المستويات العليا.

نتائج السؤال الثالث: هل يختلف التحسن (الكسب) في مستويات التفكير الهندسي قبل التعرض إلى التعلم من خلال أُنموذج بيري وكيرين وبعده لدى طالبات الصف السابع باختلاف طريقة التدريس؟

للإجابة عن هذا السؤال، تمّ حساب التحسن في مستويات التفكير الهندسي قبل المعالجة وبعدها لكل طالبة من طالبات المجموعتين التجريبية والضابطة، وذلك من خلال ترميز المستويات: (صفر) يرمز للمستوى دون التصوري؛ (1) يرمز للتصوري؛ (2) يرمز للتحليلي؛ (3) يرمز للاستدلال غير الشكلي؛ (4) يرمز للاستدلال الشكلي، وبعدها تمّ ايجاد المتوسط الحسابي للتحسن، فضلاً عن استخدام اختبار "ت" لعينين مستقلتين، والجدولان (8) و(9) يوضحان ذلك:

الجدول (8): التحسن في مستويات التفكير الهندسي لطالبات المجموعتين قبل المعالجة وبعدها

أنموذج بيري وكيرين				اعتيادية			
رقم الطالبة	مستوى قبلي	مستوى بعدي	مقدار الكسب	رقم الطالبة	مستوى قبلي	مستوى بعدي	مقدار الكسب
1	1	4	3	1	1	2	1
2	1	4	3	2	1	2	1
3	0	2	2	3	0	1	1
4	0	2	2	4	0	2	2
5	1	4	3	5	0	1	1
6	1	4	3	6	1	2	1
7	0	4	4	7	0	0	0
8	0	1	1	8	0	1	1
9	0	4	4	9	0	0	0
10	1	4	3	10	0	0	0
11	0	4	4	11	0	1	1
12	1	4	3	12	0	1	1
13	0	3	3	13	1	2	1
14	0	1	1	14	1	2	1
15	0	2	2	15	0	1	1
16	0	2	2	16	0	0	0
17	0	2	2	17	1	2	1
18	1	2	1	18	1	3	2
19	1	3	2	19	0	1	1
20	1	4	3	20	0	0	0
21	0	2	2	21	0	0	0
22	0	3	3	22	1	3	2
23	1	4	3	23	1	4	3
24	0	3	3	24	0	0	0
25	0	3	3	25	0	1	1

المتوسط الحسابي: 2.60 المتوسط الحسابي: 92.

الانحراف المعياري:866. الانحراف المعياري: 759.

الجدول (9): المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية واختبار "ت" لأثر طريقة التدريس على التحسن في المستويات

طريقة التدريس	العدد	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	قيمة"ت"	درجات الحرية	الدلالة الاحصائية
بيري وكيرين	25	2.60	.866	7.293	48	.000
اعتيادية	25	.92	.759			

يتبين من الجدول (9) وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى($\alpha = 0.05$) تعزى لأثر طريقة التدريس في مقدار التحسن بعد التعرض للتعلم من خلال أُنموذج بيري وكيرين، وجاءت الفروق لصالح المجموعة التجريبية.

وهذه النتيجة تدعم نتائج السؤالين الأول والثاني من أسئلة الدراسة الحالية وتتفق هذه النتيجة مع ما جاء في الدراسات (Hijazi, 2020; Bani Salamah, 2023; Rexhepi and Makasevska, 2024) إذ أظهرت في نتائجها فاعلية التدريس من خلال أُنموذج بيري وكيرين مقارنة بالطريقة الاعتيادية، ويسهم أيضاً في تنمية التفكير والتبرير الرياضي. ويعتقد فان هيل (Van Hiele (1999 بأن الانتقال من مستوى تفكير في الهندسة إلى مستوى تفكير أعلى أو أكثر تقدماً يعتمد على نوعية التعليم. فمن هنا، يمكن القول بأن نوعية التعليم التي تناولت مستويات فهم رياضي يتدرج من مستويات فهم أدنى إلى مستويات فهم أعلى، قد أسهم في تحسين مستويات التفكير الهندسي، وانتقال الطلبة من مستوى التفكير الذي لديه قبل التعرض لأُنموذج بيري وكيرين إلى مستوى تفكير أعلى بعد التعرض للأُنموذج. وتجدر الاشارة إلى أنّ مستويات التفكير الهندسي مرتبطة بمراحل تكوين المفهوم التي تبدأ بمرحلة التعرف إلى المفهوم التي تحتاج إلى خبرات مادية وهي تتقاطع مع مستويي المعرفة الأولية وتكوين الصورة من أُنموذج بيري وكيرين، ومرحلتي تمييز المفهوم والتجريد التي تعتمد على معرفة السمات المميزة للمفهوم واكتشاف العلاقات؛ وتتقاطع هاتان المرحلتان مع مستويات امتلاك الصورة وملاحظة الخصائص والطابع الرسمي من مستويات النموذج. واعتماداً على ما سبق فإنّ اجراءات التدريس التي رافقت أُنموذج بيري وكيرين قد حسّنت من مستويات التفكير الهندسي لدى الطلبة.

ويمكن القول بأنّ نتائج الدراسة الحالية تتفق مع نتائج دراستي (Hijazi, 2020; Bani Salamah, 2023) من حيث وجود أثر لأُنموذج بيري وكيرين في تحسين التفكير بشكل عام ومهاراته الفرعية بشكل خاص، فضلاً عن أثره في متغيرات تابعة أخرى، وتختلف هذه الدراسة في نتائجها مع ما جاء في دراسة كازانوفا وآخرون (Casanova et al.,2021)، وذلك من حيث عدم وصول الطلبة إلى مستوى الاستدلال غير الشكلي من التفكير الهندسي.

التوصيات

في ضوء النتائج، يوصي الباحثين بالآتي:

– أولاً: توظيف أُنموذج بيري وكيرين كمدخل تدريسي في تعليم وتعلم الرياضيات وخاصة في

مجال الهندسة والتفكير الهندسي، فهو يساعد على تحسين أداء الطلبة في الهندسة، وينمي مستويات التفكير في الهندسة ويرتقي بالطلبة إلى مستويات متقدمة.

- ثانياً: إجراء مزيد من البحوث لتطوير التعليم المرتكز على أُنموذج بيري وكيرين لموضوعات هندسية أخرى، ولمعايير محتوى مختلفة كالجبر ولمراحل تعليمية مختلفة.
- ثالثاً: إجراء دراسات تتناول ميزة الطي للخلف للتعمق في فهم الطلبة في المستويات العليا في التفكير كالاستنتاج، والتجريد والبرهان.
- رابعاً: إجراء دراسات نوعية بتصميم دراسة حالة لفهم تطور النمو في مستويات التفكير الهندسي لدى الطلبة في أثناء ممارسة ميزة الطي للخلف.

Referenes:

Abdullah, A. H., and Zakaria, E. (2013). The effects of Van Hiele's phases of learning geometry on students' degree of acquisition of Van Hiele levels. *Procedia - Social and Behavioral Sciences.* 102, 251-266.

Akarsu, M. (2022). How the Van Hiele theory and the Pirie-Kieren theory can be used to assess pt`s understanding of concept of reflection. *ekev akademi dergisi*, 26(90), 363-376.

Aljahni, A. (2016). The relationship between the level of geometric thinking and the level of spatial ability among secondary school female students in Medina. *Arab Journal Science and Research Publishing*. 2(16), 65-86.

Alsharmelsi, M. (2023). The effectiveness of using the Van Hiele teaching model supported by geogebra software in developing geometric thinking among second year preparatory school students. *Journal of Contemporary Curricula and Educational Technology*, 2023(4), 145-170.

Arenas, J. A. and Rodriguez, F. M. (2022). Understanding ratio through Pirie-Kieren. *ACIA Scientiae*, 24(4), 24-56.

Bani Salama, A. (2023). The effect of using Pirie and Kieren model for mathematical understanding in enhancing mathematical reasoning and cognitive flexibility among the seventh grade students. *Jerash Journal for Research & Studies.* 24(5), 301-326.

Casanova, J. R., Cantoria, C. C. and Lapinid, M. R. (2021). Student's geometric thinking on triangles: much improvement is needed. *Infinity Journal of Mathematics Education*, 10(2), 217-234

Celika, H. S. and Yilmaz, G. K. (2022). Analysis of Van Hiele geometric thinking levels studies in Turkey: A meta-synthesis study. *International Journal of Curriculum and Instruction,* 14(1), 473-501.

Dalio, F. (2014). Standards of validity and reliability in quantitative and qualitative research. *Journal of Social Sciences*, 19, 83-93.

Goklap, N.D, and Bulut, S. (2018). A new form of understanding maps: multiple representation with Pirie and Kieren model of understanding. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *26(*6), 1-21.

Gulkilik, H., Ugurlu, H. H., and Yuruk, H. (2015). Examining student's mathematical understanding of geometric transformations using the Pirie- Kieren model. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 15(6), 1531-1548.

Hijazi, M. (2020). The effect of Pirie and Kieren model to develop algebraic thinking for the second year middle school students. *College of Education Journal*. 110, 1-30.

Irvine, J. (2023). The Pirie Kieren dynamic model of the growth of mathematical understanding: The critical concept of folding back. *Journal of instructional pedagogies*. 233721, 1-18.

Kamel, A. (2022). Effect size and effectiveness in experimental Rresearch. *International Journal of Media and Communication Research,* 2(3), 1-28. Retrieved from *https://dx.doi.org/10.21608/ijmcr.2022.122378.1000*

Kasawneh, A. (2007). Special geometric thinking levels among tenth grade students. *Jordanian Journal of Educational Sciences*, *3*(1), 11-32.

Lyndon, M., Lionel, L., and Lynda, F. (2005). Folding back and the growth of mathematical understanding in workplace training. *ALM International Journal.* 1(1), 19-35.

Mardiana, S., Susiswo, and Hidayanto, E. (2017). Students’ growth of mathematical understanding in solving derivative problem. *IOSR Journal of Research and Method in Education*, 7(3), 36-41.

Mawarsari, V., Waluya, B., & Dewi, N.(2023). Profile of students geometric thinking ability in terms of Van Hiele level. Lewis, 758, 107-119

National Center, (2019). Amman, *https://www.iea.nl/sites/default/files/2021 04/NationalReportTIMSS%202019_Jordan.pdf*

Naufal, M., Abdullah, A., Zainal, Z. and Alshaye, I. (2024). The trend of geometric thinking studies: a systematic review. *IICMA*, 58, 1-14.

NCTM. (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. *National Council of Teachers of Mathematics.*

NCTM. (2020). Catalyzing change in middle school mathematics: Initiating critical conversations. *National Council of Teachers of Mathematics.*

Negara, R., Turmudi, T. and Wahyudin, W. (2024). Mathematics learning assessment based on Pirie- Kieren theoretical framework in elementary school. *ICMSCE*. 13, 241-252.

Ouda, A. (2010). *Measurement and Evaluation in the Teaching Process E(4)*. Irbid. Dar Alamal for Puplishing and Distribution.

Patmaniar, Amin, S.M. and Sulaiman, R. (2021). Students growing understanding in solving mathematics problems based on gender: elaborating folding back. *Journal on Mathematics Education*, 12(3), 507-530.

Pavlovicova, G., and Bockova, v. (2021). Geometric thinking of future teachers for primary education - an exploratory study in Slovakia. *Mathematics.* 9 (2992). Retrieved from *https://doi.org/10.3390/math9232992*

Pirie, S., and Kieren, T. (1992). Creating constructivist environment and constructing mathematics educational studies in mathematics, 23(5), 505-528. Retrieved from *https://doi.org/10.1007/BF00571470*

Pirie, S., and Kieren, T. (1994). Beyond Metaphor: Formalizing in mathematical understanding within constructivist environments. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 39-43.

Rahayu, S. and Jupri, A. (2021). Geometrical thinking of junior high school students on the topic of lines and angles according to Van Hiele theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 1806(012089). Retrieved from *http://10.1088/1742-6596/1806/1/012089*

Rexhepi, H. and Makasevska, V. (2024). The effect of the Pirie - Kieren theory on developing fraction understanding in third-grade students. *Journal of Curriculum Studies Research*, 6(2),196-214.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. *Department of Education*, University of Chicago.

Uygun, T. and Guner, P. (2021). Van Hiele levels of geometric thinking and constructivist-based teaching practices. *Mersin University Journal of the Faculty of Education*, 17(1), 22-40.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insights: A theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic Press.*

Van Hiele, P.M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.

Xistouri, X., Pantaizi, D., & Gagatsis, (2014). Primary school student's structure and levels of abilities in transformational geometry. *Investigation in Mathematics Education*, 17(1-4). Retrieved from *http://10.12802/relmie.13.1747*